ECUACIONES DE MOVIMIENTO

(PRÁCTICA 5: TRABAJO Y ENERGÍA)

Ing. Francisco Franco – Web: http://mgfranciscofranco.blogspot.com/

Fuente de información: Trabajo de grado de Mónica A. Camacho D. y Wilson H. Imbachi M.

Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones

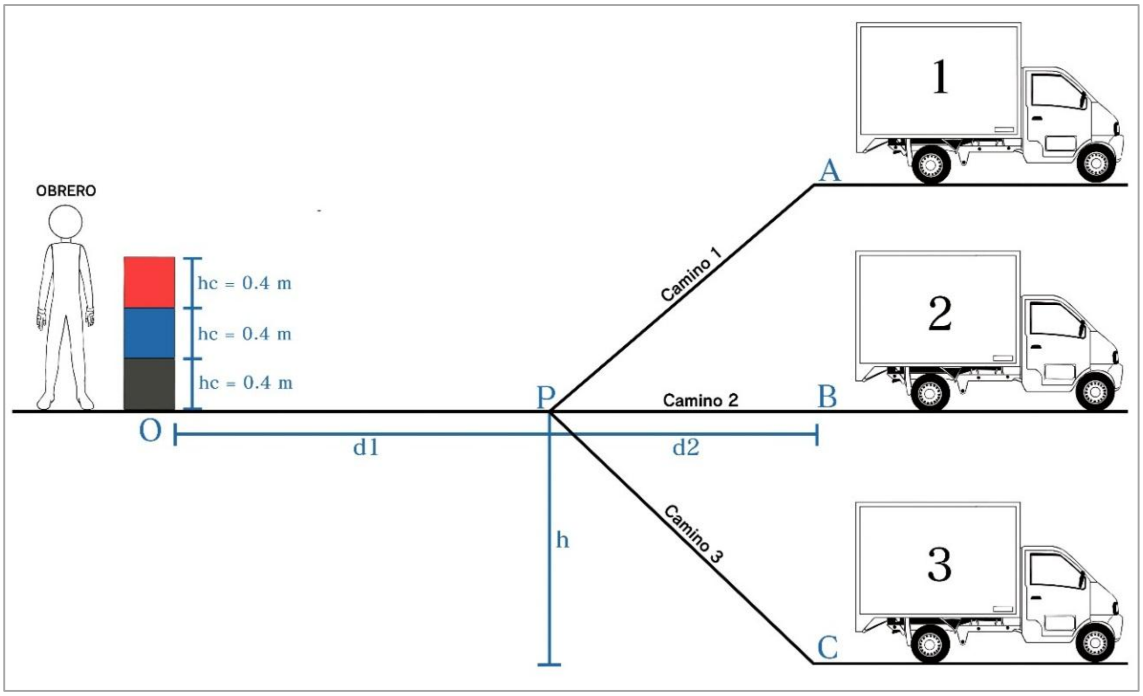

Figura 18. Práctica de trabajo y energía – Sistema general.

El sistema a través del cual el obrero realiza la traslación de las cajas por los diferentes caminos hasta cada uno de los camiones se muestra en la figura 18. Considerando tramo a tramo su desplazamiento por los diferentes puntos del recorrido, se obtienen las siguientes las ecuaciones de movimiento del sistema:

5.1. Trabajo del obrero (Tramo O-P):

De acuerdo a la figura 19 se determina la expresión general del trabajo que realiza el obrero levantando las cajas en el punto de inicio del sistema, considerando que la fuerza que se aplica sobre ellas es equivalente al peso de cada una ($F = mg$) y la altura a la cual son levantadas depende de la posición inicial en que están organizadas.

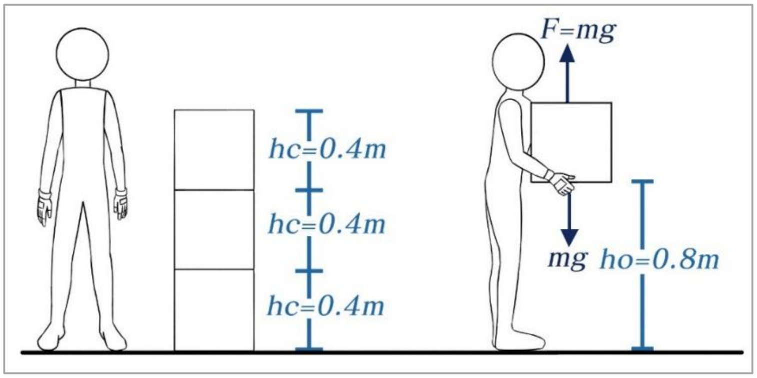

Figura 19. Punto O – Levantar cajas.

Dado que la fuerza aplicada sobre cada caja está en la misma dirección del desplazamiento ($\theta = 0°$) se tiene que:

$$W_F = mgh = mg(0) = 0$$

$$W_F = mgh \tag{93}$$

De esta manera el trabajo hecho por el obrero levantando la caja azul (ubicada a 0.8 metros del suelo), la caja roja (ubicada a 0.4 metros del suelo) y la caja negra (ubicada al nivel del suelo) respectivamente viene dado por las siguientes expresiones:

$$W_F = mgh = mg(0) = 0 \tag{94}$$

$$W_F = mgh = mg(0.4) = 0.4mg \tag{95}$$

$$W_F = mgh = mg(0.8) = 0.8mg \tag{96}$$

Independientemente del camino escogido, el obrero debe recorrer siempre el tramo O-P, y dado que la dirección de aplicación de la fuerza para sostener las cajas es perpendicular a su desplazamiento, se mantiene el valor inicial de trabajo determinado en el punto de partida. Ahora bien, si se escogen las opciones de recorrer el camino 1 o el camino 3 el obrero llega al punto P y desciende la caja hasta el nivel del suelo, como se muestra en la figura 20.

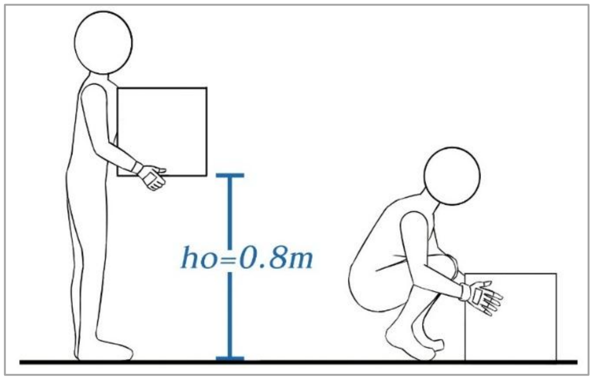

Figura 20. Punto P – Bajar caja.

En este punto el trabajo llevado a cabo por el obrero conserva la misma magnitud que el realizado en el punto de partida (punto O) pero con signo opuesto debido a que en este caso la dirección en que se aplica la fuerza es opuesta a la dirección del desplazamiento de las cajas.

5.2. Trabajo del obrero (TRAMO P-A):

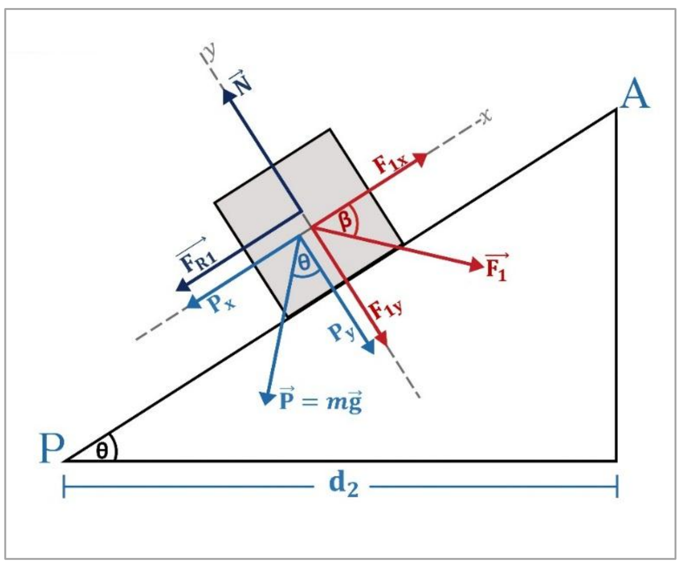

Figura 21. Fuerzas presentes en la caja - Plano inclinado ascendente.

El trabajo realizado por el obrero para llevar la caja del punto P hasta el punto A (plano inclinado ascendente) se determina con base en el esquema de la figura 21, en la cual se observan las diferentes fuerzas que actúan sobre el cuerpo a medida que es arrastrado por la rampa empinada. En primer lugar se determina la longitud del plano inclinado (L_1), cuyo valor depende del ángulo de elevación θ ingresado:

$$\cos\theta_1 = \frac{d_2}{L_1} \rightarrow L_1 = \frac{d_2}{\cos\theta_1} \quad \textbf{(97)}$$

Para subir cualquiera de las cajas a través de la rampa inclinada el obrero aplica una fuerza F_1 en dirección $\beta = -40°$ respecto del eje x del sistema coordenado escogido. El valor de esta fuerza depende de los datos iniciales correspondientes al ángulo de inclinación de la rampa (θ), el coeficiente de rozamiento de su superficie (μ_1) y la masa de las cajas (m). Con base en el diagrama del cuerpo libre de la figura 21 las componentes rectangulares de la fuerza F_1 se expresan como:

$$F_{1x} = F_1 \cos\beta \quad \textbf{(98)}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin\beta \quad \textbf{(99)}$$

Por su parte, la fuerza que representa al peso de las cajas (P) se descompone de la siguiente forma:

$$P_x = mg\sin\theta_1 \quad \textbf{(100)}$$

$$P_y = mg\cos\theta_1 \quad \textbf{(101)}$$

Aplicando la segunda ley de Newton se determina la expresión que representa la fuerza de rozamiento de la superficie de la rampa 1(F_{R1}):

$$\sum F_y = N - P_y - F_{1y} = 0$$

$$N = P_y + F_{1y} \quad \textbf{(102)}$$

$$F_{R1} = \mu_1 N = \mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) \quad \textbf{(103)}$$

Una vez definidas las fuerzas que actúan sobre las cajas dentro del plano inclinado ascendente se determina el trabajo individual que aporta cada una de ellas. De esta manera, el trabajo respectivo de la fuerza aplicada a la caja (componentes de F_1), del peso (componentes de P) y de la fuerza de rozamiento (F_{R1}) se definen de la siguiente forma:

$$W_{F_{1x}} = (F_1 \cos\beta) L_1 \cos\alpha = (F_1 \cos\beta) L_1 \cos(0) = (F_1 \cos\beta) L_1 \quad \textbf{(104)}$$

$$W_{F_{1y}} = (F_1 \sin\beta) L_1 \cos\alpha = (F_1 \sin\beta) L_1 \cos(-90) = 0 \quad \textbf{(105)}$$

$$W_{P_x} = (mg\sin\theta_1) L_1 \cos\alpha = (mg\sin\theta_1) L_1 \cos(180) = -(mg\sin\theta_1) L_1 \quad \textbf{(106)}$$

$$W_{P_y} = (mg\cos\theta_1) L_1 \cos\alpha = (mg\cos\theta_1) L_1 \cos(-90) = 0 \quad \textbf{(107)}$$

$$W_{F_{R1}} = \mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) L_1 \cos\alpha = \mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) L_1 \cos(180)$$

$$W_{F_{R1}} = -\mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) L_1 \quad \textbf{(109)}$$

El trabajo neto compuesto por los trabajos individuales de cada una de las fuerzas que intervienen en este tramo del sistema se expresa de la siguiente forma:

$$W_{Neto} = W_{F_{1x}} + W_{P_x} + W_{F_{R1}}$$

$$W_{Neto} = (F_1 \cos\beta) L_1 - (mg\sin\theta_1) L_1 - \mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) L_1$$

$$W_{Neto} = L_1 \left[F_1 \cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1 \left(P_y + F_{1y}\right) \right] \quad \textbf{(110)}$$

Se calcula la velocidad con que la caja llega al final del plano inclinado. Para ello se recurre a los valores de energía cinética (K) de la caja en los puntos P y A:

$$K_i = 0 \quad \textbf{(111)}$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} \quad \textbf{(112)}$$

Se expresa el trabajo neto hallado en la ecuación (110) como la diferencia entre la energía cinética final (K_f) y la energía cinética inicial (K_i) (teorema del trabajo y la energía). De esta manera la velocidad final de la caja en el punto A ($v_f = v_A$) es:

$$W_{Neto} = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^{\,2}$$

$$L_1\left[F_1\cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1\left(P_y + F_{1y}\right)\right] = \frac{1}{2}mv_f^{\ 2}$$

$$v_f^{\ 2} = \frac{2L_1}{m}\left[F_1\cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1\left(P_y + F_{1y}\right)\right]$$

$$v_f = v_A = \sqrt{\frac{2L_1}{m}\left[F_1\cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1\left(P_y + F_{1y}\right)\right]} \qquad \textbf{(113)}$$

Con el valor de velocidad calculado se determina la aceleración con que la caja realiza su movimiento ascendente a través del plano inclinado. Considerando que al inicio de la rampa la caja parte con una velocidad $v_i = 0m/s$ y que la distancia total recorrida es $s = L_1$, se utiliza la ecuación de velocidad en función del desplazamiento del movimiento unidimensional para encontrar el valor de dicha aceleración:

$$v_f^{\ 2} - v_i^{\ 2} = 2as$$

$$v_f^{\ 2} = v_A^{\ 2} = 2aL_1$$

$$a = \frac{v_A^{\ 2}}{2L_1} \qquad \textbf{(114)}$$

Reemplazando el valor de velocidad final en la ecuación () se tiene:

$$a = \frac{2L_1\left[F_1\cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1\left(P_y + F_{1y}\right)\right]}{2L_1 m}$$

$$a = \frac{F_1\cos\beta - mg\sin\theta_1 - \mu_1 mg\cos\theta_1 - \mu_1 F_1\sin\beta}{m}$$

$$a = \frac{F_1\cos\beta - \mu_1 F_1\sin\beta}{m} - g\sin\theta_1 - \mu_1 g\cos\theta_1 \qquad \textbf{(115)}$$

Para desplazar las cajas a través del plano inclinado el obrero debe aplicar una fuerza F_1 lo suficientemente grande como para sobrepasar la magnitud de las dos fuerzas que se oponen al movimiento de las mismas (P_x y F_{R1}). Partiendo de esta premisa se deduce el valor de F_1 de la siguiente forma:

$$F_1 > P_x + F_{R1}$$

$$F_1 \cos\beta > mg\sin\theta_1 + \mu_1 P_y + \mu_1 F_{1y}$$

$$F_1 \cos\beta > mg\sin\theta_1 + \mu_1 mg\cos\theta_1 + \mu_1 F_1 \sin\beta$$

$$F_1 \cos\beta > mg\left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right) + \mu_1 F_1 \sin\beta$$

$$F_1 \cos\beta - \mu_1 F_1 \sin\beta > mg\left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right)$$

$$F_1\left(\cos\beta - \mu_1 \sin\beta\right) > mg\left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right)$$

$$F_1 > \frac{mg\left(\sin\theta_1 + \mu_1 \cos\theta_1\right)}{\left(\cos\beta - \mu_1 \sin\beta\right)} \qquad \textbf{(116)}$$

Al llegar al final de la rampa 1 el obrero debe recoger la caja y llevarla desde su posición del suelo hasta un punto del camión ubicado a 0.8 metros del mismo. El trabajo realizado es igual al del punto inicial (punto O) cuando se escoge llevar la caja negra. Otro caso similar se presenta cuando se escoge la opción de transitar el camino 3, ya que al finalizar el recorrido por la rampa 2 la caja debe ser levantada y depositada en el camión, como se observa en la figura 21.

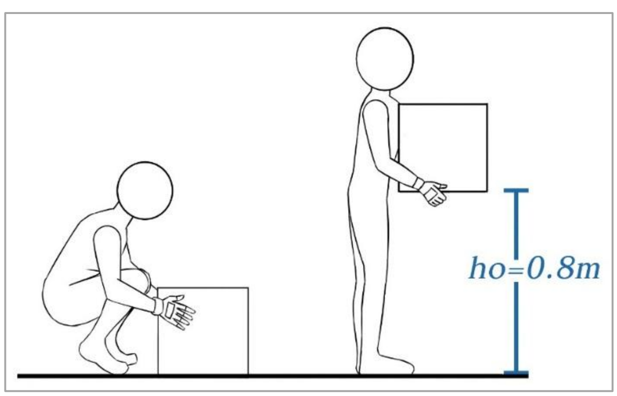

Figura 22. Punto A – Depositar la caja dentro del camión.

5.3. Trabajo realizado en el tramo P-C:

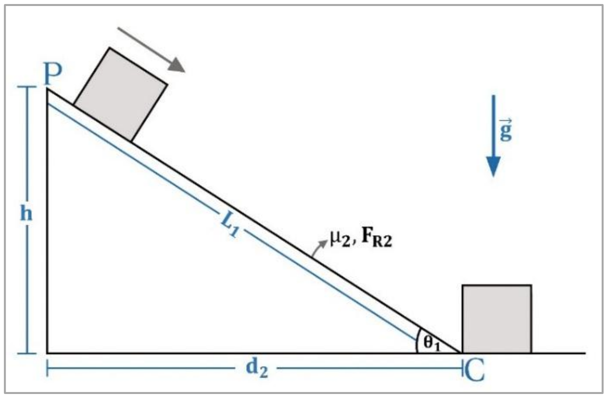

Figura 23. Camino 2 – Plano inclinado descendente.

Inicialmente se calcula la longitud del plano inclinado descendente (L_2) por el cual se desplaza la caja bajo la acción de la gravedad:

$$L_2 = \frac{h}{\sin\theta_2} \quad \textbf{(117)}$$

En el punto P la caja se encuentra en el lugar más alto de la rampa inclinada ($y = h$) y su movimiento descendente a partir de esta posición lo realiza desde el reposo ($v_0 = 0m/s$). Partiendo de estos datos se calculan los valores iniciales de energía cinética y de energía potencial en la parte superior del plano descendente de la siguiente forma:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = 0 \quad \textbf{(118)}$$

$$U_i = mgy_i = mgh \quad \textbf{(119)}$$

Por su parte, en el inferior de la rampa 2 (punto C) las cajas adquieren una determinada velocidad (v_f) y una altura final igual a cero ($h = 0$). De esta forma los valores finales de energía cinética y potencial vienen dados como:

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} \quad \textbf{(120)}$$

$$U_i = mgy_f = mg(0) = 0 \quad \textbf{(121)}$$

Aunque se tienen los valores de energía cinética final y energía potencia inicial, no se cumple la igualdad $U_i = K_f$ ya que existe una fuerza no conservativa que extrae energía mecánica del sistema (F_{R2}). En este caso el trabajo total del sistema lo realiza la fuerza de fricción, el cual puede ser expresado como la diferencia entre los valores de dichas energías (K_f y U_i) como se muestra a continuación:

$$\Delta K_{ext} = -Fs = -F_{R2} L_2$$

$$\Delta K_{ext} = K_f - U_i$$

$$-F_{R2} L_2 = \frac{1}{2} m {v_f}^2 - mgh \tag{122}$$

Finalmente de la expresión (122) se despeja la variable correspondiente a la velocidad final de la caja en el punto C:

$${v_f}^2 = \frac{2\left(-F_{R2} L_2 + mgh\right)}{m}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\left(-F_{R2} L_2 + mgh\right)}{m}} \tag{123}$$